제목: Roboterdynamik: Übung 02

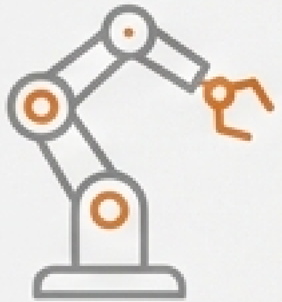
부제: DH-Parameter und homogene Transformation

설명: Skript의 핵심 개념을 활용하여 연습 문제를 단계별로 해결하는 가이드입니다.
이 프레젠테이션은 DH-Konontion을 적용하여 로봇 Kinematik을 설명하고, 관련
Transformationsmatrix를 계산하는 방법을 이해하는 데 도움을 줄 것입니다.

제목: Agenda & 학습 목표: 개념에서 해결까지

1. Grundlagen: 문제 해결에 필요한 도구

* Denavit-Hartenberg (DH) Parameter란 무엇인가?
* Koordinatensystem 설정을 위한 DH-Konvention 규칙
* 위치와 방향을 설명하는 homogene Transformationsmatrix



2. Anwendung: 연습 문제 단계별 풀이

* **Aufgabe 2.1**: 3-DOF 로봇의 상세 분석
* **Aufgabe 2.2**: DH-Konvention 적용
* **Aufgabe 2.3**: homogene Transformation의 Inverse

학습 목표:
이 프레젠테ATION을 통해 DH-Konvention을 적용하여 로봇 Kinematik을 기술하고, 관련된 Transformationsmatrix를 계산하는 방법을 완전히 이해하게 됩니다.

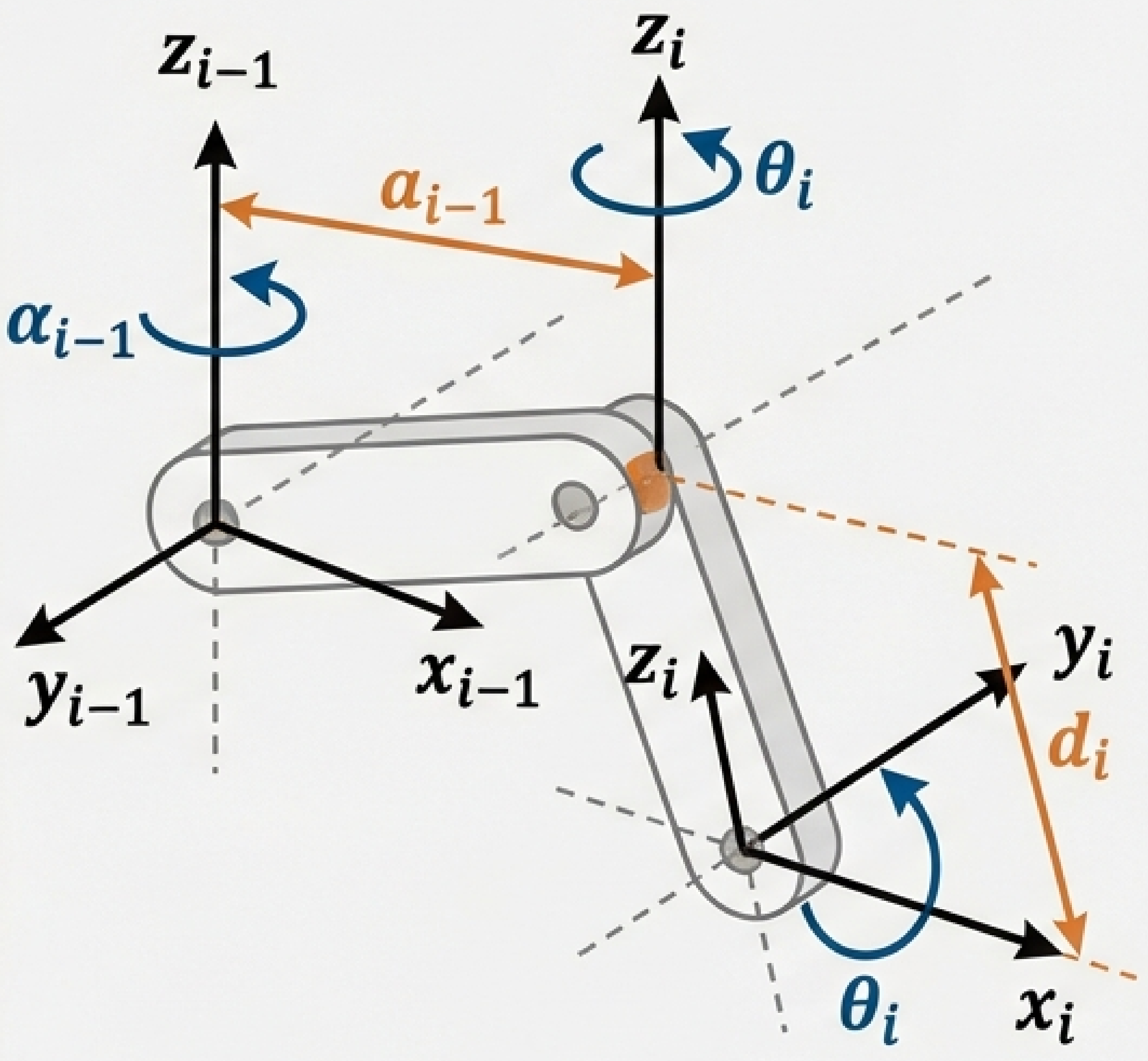
제목: Grundlagen 1/3: Die Denavit-Hartenberg (DH) Parameter

핵심 개념: 4개의 Parameter로 상대적 위치와 방향 기술

Denavit-Hartenberg-Konvention은 로봇 공학에서 인접한 두 Roboterglied 사이의 상대적인 위치와 방향을 단 4개의 Parameter로 고유하게 설명하는 표준 절차입니다.

- **4개의 DH-Parameter:**
  * a_{i-1}: z_{i-1} 축과 z_i 축 사이의 거리. x_{i-1} 축을 따라 측정됩니다.
  * α_{i-1}: z_{i-1} 축과 z_i 축 사이의 각도. x_{i-1} 축을 중심으로 회전합니다.
  * d_i: x_{i-1} 축과 x_i 축 사이의 거리. z_i 축을 따라 측정됩니다.
  * θ_i: x_{i-1} 축과 x_i 축 사이의 각도. z_i 축을 중심으로 회전합니다.

**Noto Sans KR Regular



**참고: skript_rd, Kapitel 2.2.5

제목: Grundlagen 2/3: Die DH-Konvention – KOS 설정을 위한 규칙

절차: 체계적인 프로세스

Körper에 고정된 Koordinatensystem (Bi`)의 올바른 배치는 매우 중요합니다. Skript에 명시된 다음 단계(**Craig** 1989 기준)를 따르십시오.

1. **Körper 및 Achse 번호 매기기:** Körper 1부터 N까지, Achse 1부터 N까지. Körper 0은 Basis입니다.
2. **zi-1-Achse 설정:** Bewegungsachse (회전 또는 병진 축) **i-1**과 동일하게 설정합니다.
3. **Ursprung Bi-1 설정:**
   - Achse **i-1**과 **zi-1, zi**의 공통 수선이 만나는 지점.
   - 축들이 교차하는 경우: 교차점.
4. **xi-1-Achse 설정:**
   - **zi-1**에서 **zi**로 향하는 공통 수선을 따라 설정합니다.
   - 축들이 평행할 경우: 임의로 선택 가능 (주로 Parameter가 0이 되도록).
   - 축들이 교차할 경우: **zi-1**과 **zi**가 이루는 평면에 수직이 되도록 설정합니다.
5. **yi-1-Achse 설정:** 오른손 법칙(**xi-1 x zi-1**)에 따라 결정됩니다.
6. **특수 경우 `B0 및 `BN:**
   - **B0**: 종종 q1=0일 때 **B1**과 동일하게 설정합니다.
   - **BN** (Endeffektor): 가능한 많은 DH-Parameter가 0이 되도록 선택합니다.

**참고: skript_rd, Kapitel 2.2.5, Seite 11

제목: Grundlagen 3/3: Die homogene Transformation

도구: Rotation과 Translation을 하나의 Matrix로 표현

homogene Transformationsmatrix $jD_i \in \mathbb{R}^{4\times4}$는 Koordinatensystem i의 Konfiguration (위치 및 방향)을 Koordinatensystem j에 대해 기술합니다.

Matrix의 구조:

$$jD_i = \left(\begin{array}{cc|cc} jA_i & j_rj_i & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right)$$

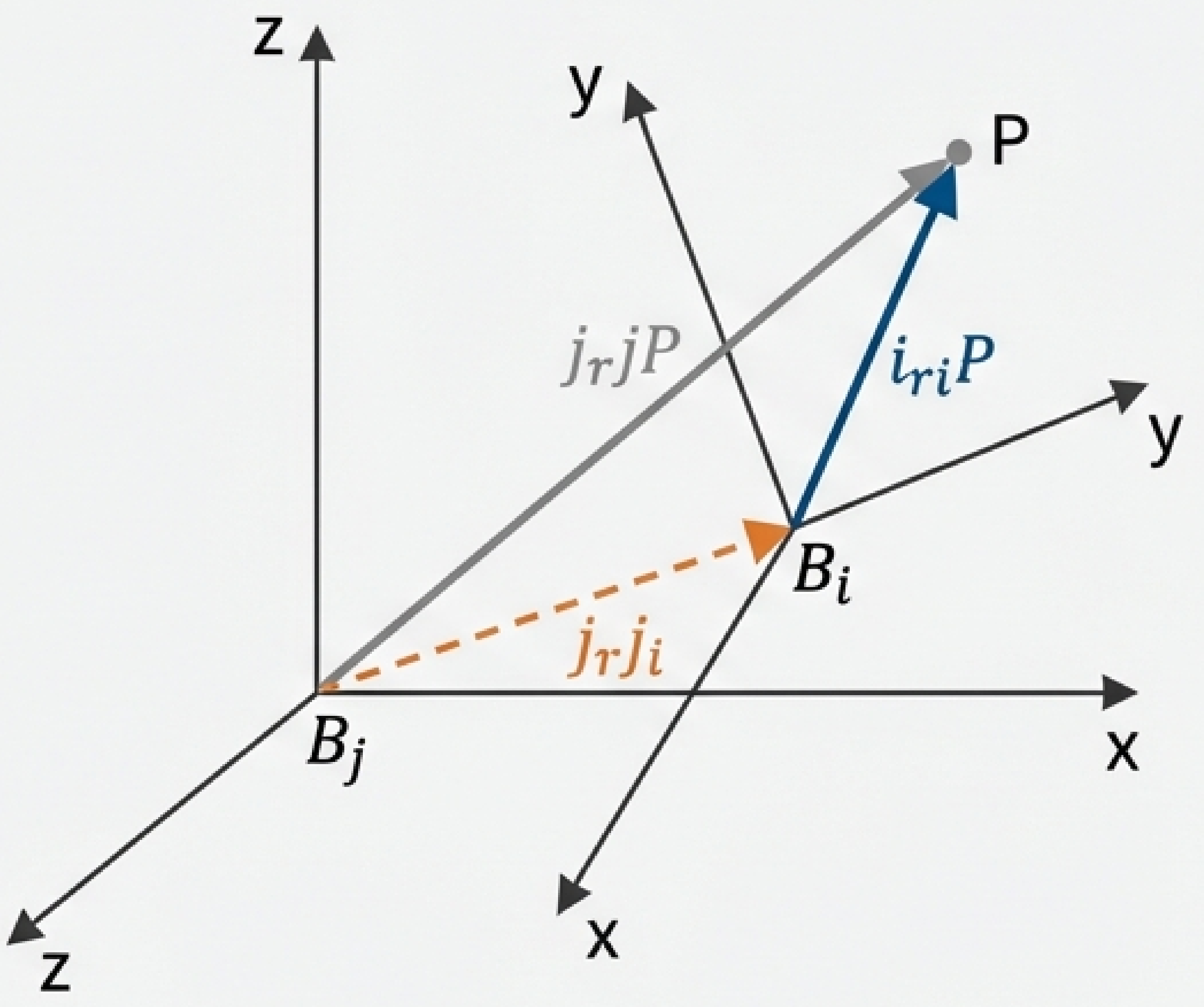
- $jA_i \in \mathbb{R}^{3\times3}$: Drehmatrix (Rotation), System i의 벡터를 System j로 변환합니다.
- $j_rj_i \in \mathbb{R}^3$: Ortsvektor (Translation), System j에서 System i의 Ursprung 위치를 나타냅니다.

적용:

Punkt P를 KOS i에서 j로 변환:

$$(j_rjP \mid 1) = jD_i * (i_{ri}P \mid 1)$$

Visual:



참고: skript_rd, Kapitel 2.2.6, Gleichung 2.2.23

제목: Anwendung: Aufgabe 2.1 – 문제 설명

Aufgabe 2.1: 3-DOF 로봇의 Kinematik

세 개의 Freiheitsgrad (q_1, q_2, q_3)을 가진 로봇이 주어졌습니다. TCP-Vektor는 $3r_{3,TCP} = (0 \ \ -l \ \ \ 0)^T$ 이며, Körperfestes Koordinateſsystem B_3에서 표현됩니다.

DH-Parameter Tabelle:

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{\alpha_{i-1}}$	$\boldsymbol{a_{i-1}}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{\theta_i}$
1	0	0	0	q_1
2	$\pi/2$	0	q_2	0
3	$-\pi/2$	0	l	q_3

해결 과제:

a) $q_1 = q_3 = 0$ 및 $q_2 = 2l$ 조건에서 로봇의 kinematische Konfiguration을 그리시오. 모든 Achse, Koordinatensystem 및 TCP를 스케치하시오. 주어진 정보로 Gelenk의 위치를 설명할 수 있습니까?

b) Drehmatrix $2A_3$, Ortsvektor $2r_{23}$, 그리고 homogene Transformationsmatrix $2D_3$를 결정하시오. $0r_{0,TCP}$ 계산을 위한 방정식을 제시하시오.

제목: Lösung zu 2.1a: Kinematische Konfiguration 그리기

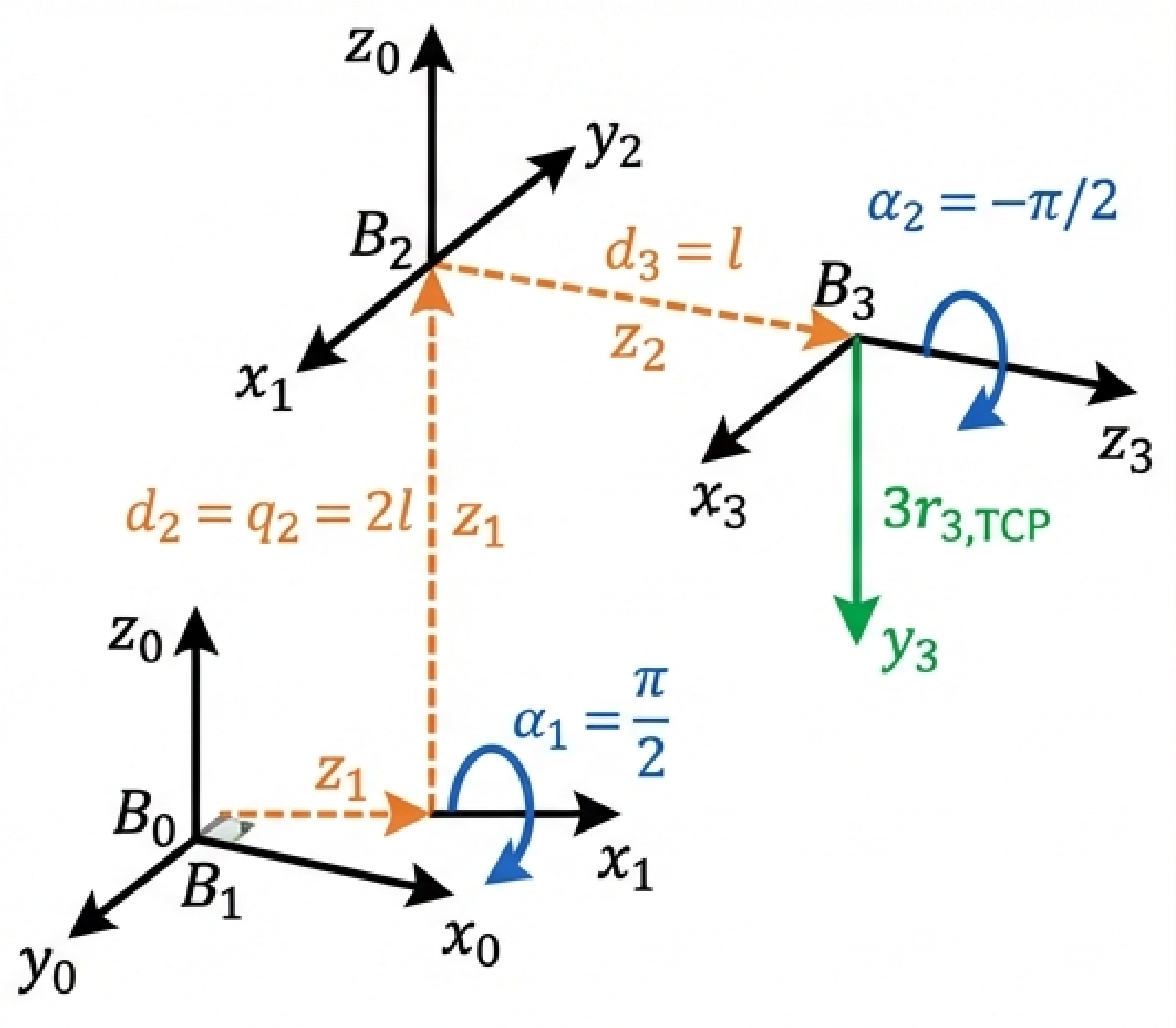
DH-Konvention 적용 단계 (슬라이드 4 참조):

DH-Parameter:

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	q_1
2	$\pi/2$	0	q_2	0
3	$-\pi/2$	0	l	q_3

- **B_0, B_1** (i=1): $\alpha_0=0$, $a_0=0$이므로 z_0와 z_1은 평행하고 동일 선상에 있습니다. $\theta_1=q_1=0$이므로 B_0와 B_1은 일치합니다. z_0/z_1은 q_1의 Drehachse입니다.
- **B_2** (i=2): $\alpha_1=\pi/2$이므로 z_2는 x_1을 축으로 90° 회전합니다. $d_2=q_2=2l$이므로 B_2는 z_1을 따라 $2l$만큼 이동합니다.
- **B_3** (i=3): $\alpha_2=-\pi/2$이므로 z_3는 x_2를 축으로 -90° 회전합니다. $d_3=l$이므로 B_3는 z_2를 따라 l만큼 이동합니다.
- TCP: Vektor $3r_{3,\text{TCP}} = (0\ \ -l\ \ 0)^T$는 B_3의 Ursprung에서 B_3-System 기준으로 그려집니다 (음의 y_3-Achse 방향).

Visual:



질문에 대한 답변:

Gelenk 자체의 물리적 위치는 DH-Parameter만으로는 재구성할 수 없습니다. DH-Parameter는 Achse와 Koordinatensystem의 상대적 위치만 설명할 뿐, Körper의 물리적 형태는 설명하지 않습니다.

제목: Lösung zu 2.1b: Transformation 행렬 결정 (1/2)

2D3 계산

Formelsammlung에 있는 일반적인 homogene Transformationsmatrix를 사용합니다:

$$\mathbf{vDi} = \begin{pmatrix} \cos\theta i & -\sin\theta i & & & & 0 & av \\ \sin\theta i & \cos\alpha v & \cos\theta i & \cos\alpha v & -\sin i & -\sin\alpha v & \sin\alpha v di \\ \sin\theta i & \sin\alpha v & \cos\theta i & \sin\alpha v & & \cos\alpha v & \cos\alpha v di \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2D3를 구하기 위해 $v = 2$, $i = 3$을 대입합니다.

Tabelle에서 i=3에 해당하는 Parameter를 읽습니다: $\alpha 2 = -\pi/2$, $a2 = 0$, $d3 = l$, $\theta 3 = q3$

값 대입:

$$\mathbf{2D3} = \begin{pmatrix} cq3 & -sq3 & 0 & 0 \\ sq3\cdot\cos(-\pi/2) & cq3\cdot\cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2)\cdot l \\ sq3\cdot\sin(-\pi/2) & cq3\cdot\sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) & \cos(-\pi/2)\cdot l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (여기서 $\cos(-\pi/2) = 0$, $\sin(-\pi/2) = -1$ 입니다.)

결과:

$$\mathbf{2D3} = \left(\boxed{\begin{matrix} cq3 & -sq3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l & 0 & -0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sq3 & -cq3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}\right) = \left(\mathbf{2A3} \quad \mathbf{2r23} \,\middle|\, \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}\right)$$

이 결과에서 다음을 직접 읽을 수 있습니다:

* $\mathbf{2A3} = \left(\begin{array}{ccc|c} cq3 & -sq3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sq3 & -cq3 & 0 & 0 \end{array}\right)$
* $\mathbf{2r23} = (0 \quad l \quad 0)^T$

제목: Lösung zu 2.1b: Transformation 행렬 결정 (2/2)

TCP 위치 $0r0_{,TCP}$ 계산 방정식

Basis-Koordinatensystem **B0**에서의 TCP 위치는 개별 homogene Transformation들을 연쇄적으로 곱하여 계산됩니다.

1. **homogene Koordinaten으로 TCP 위치 표현:**
   Vektor $\mathbf{3r3_{,TCP}}$를 4x1 Vektor로 확장합니다: ($\mathbf{3r3_{,TCP}}$ | **1**)
2. **\`B3에서 \`B0로의 Transformation:**
   전체 Transformation **0D3**는 각 개별 Transformation의 곱입니다:

$$\begin{tikzcd}
{[B0]} \arrow[r, "0D1"] \arrow[rrr, bend right, "0D3 = 0D1 * 1D2 * 2D3"'] & {[B1]} \arrow[r, "1D2"] & {[B2]} \arrow[r, "2D3"] & {[B3]}
\end{tikzcd}$$

3. **위치 계산:**
   B0에서의 TCP 위치($\mathbf{0r0_{,TCP}}$)는 다음과 같이 계산됩니다:

$$\begin{pmatrix} 0r0_{,TCP} \\ 1 \end{pmatrix} = 0D3 * \begin{pmatrix} 3r3_{,TCP} \\ 1 \end{pmatrix}$$

최종 방정식:

$$\begin{pmatrix} 0r0_{,TCP} \\ 1 \end{pmatrix} = (0D1 * 1D2 * 2D3) * \begin{pmatrix} 3r3_{,TCP} \\ 1 \end{pmatrix}$$

추가 설명:

Vektor $\mathbf{0r0_{,TCP}}$를 추출하려면 결과로 나온 4x1 Vektor의 첫 세 행을 취하면 됩니다. 이는 다음과 같이 Projektionsmatrix를 사용하여 표현할 수도 있습니다:

$$0r0_{,TCP} = (1\ 0\ 0\ 0 \mid 0\ 1\ 0\ 0 \mid 0\ 0\ 1\ 0) * 0D3 * \begin{pmatrix} 3r3_{,TCP} \\ 1 \end{pmatrix}$$

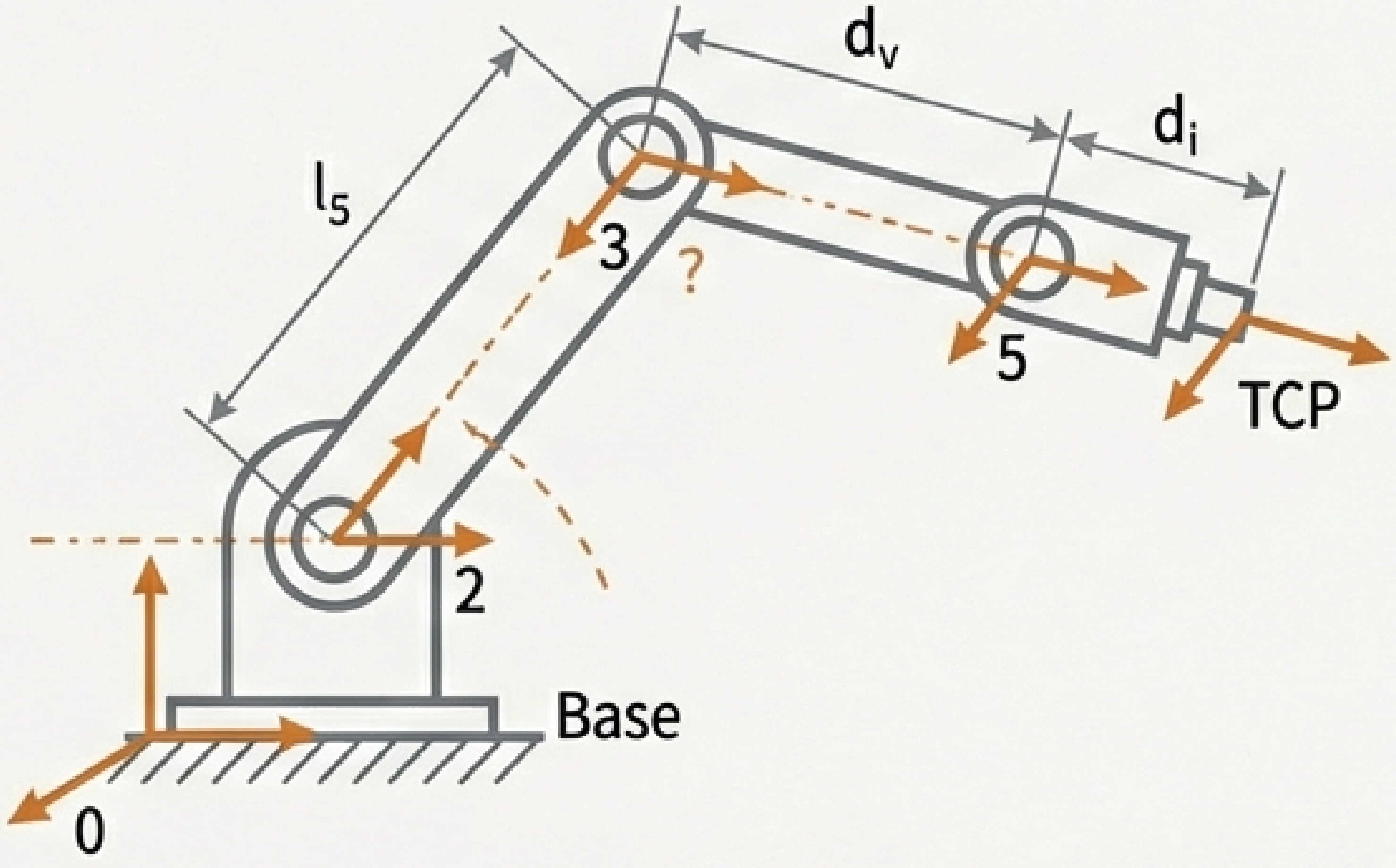
제목: Anwendung: Aufgabe 2.2 – Klausur 문제의 DH-Parameter

Aufgabe 2.2: 누락된 KOS를 그리고 DH-Parameter 결정하기

주어진 조건:
$q_1 = q_5 = q_6 = 0$ Konfiguration에 대한 Kinematische Kette.

과제:

1. DH-Konvention에 따라 누락된 Koordinatensystem 0, 1, 4, 6을 그림에 그리시오.
2. Koordinatensystem 2와 3 사이의 DH-Parameter를 구하시오.



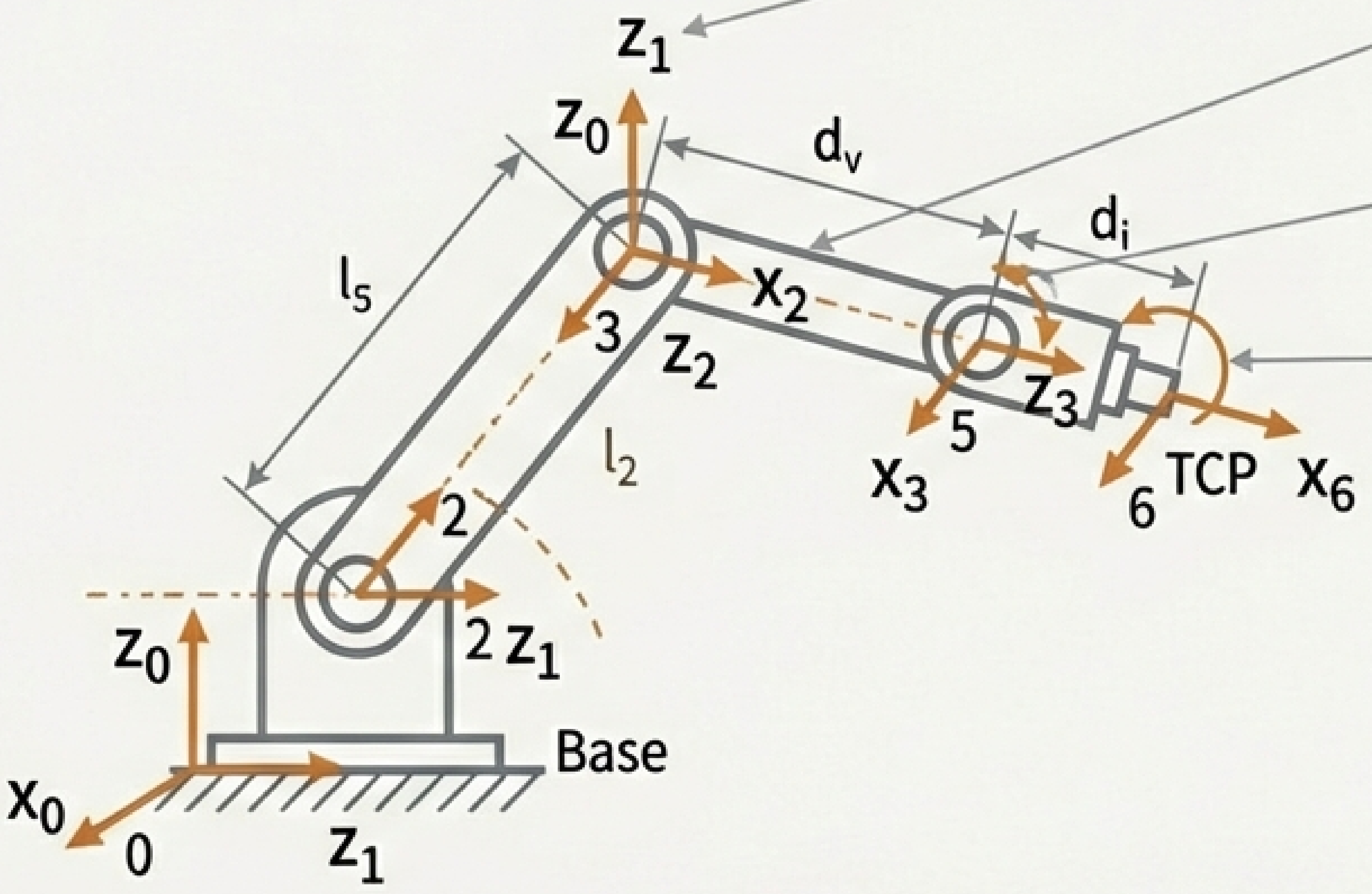
채워야 할 Tabelle:

i	α_v	α_v	d_i	θ_i
3	?	?	?	?

NotebookLM

제목: Lösung zu 2.2: KOS & DH-Parameter

Visual



Lösung: DH-Definition 적용 (슬라이드 3 & 4 참조)

i=3에 대한 DH-Parameter 결정 (B_2에서 B3로의 Transformation):

- **α_2: z_2**를 중심으로 한 **z_2**와 **z_3** 사이의 각도. **z_2**와 **z_3**는 평행합니다. -> **$\alpha_2 = 0$**
- **a_2: x_2**를 따라 **z_2**와 **z_3** 사이의 거리. 거리는 **l_2**입니다. -> **$a_2 = l_2$**
- **d_3: z_3**를 따라 **x_2**와 **x_3** 사이의 거리. **x_2**와 **x_3** 축은 **z_3**에 수직인 동일 평면에 있으므로 거리는 0입니다. -> **$d_3 = 0$**
- **θ_3: z_3**를 중심으로 한 **x_2**와 **x_3** 사이의 각도. 이것은 Gelenkwinkel에 해당합니다. -> **$\theta_3 = q_3$**

완성된 Tabelle:

i	α_v	a_v	d_i	θ_i
3	0	l_2	0	q_3

제목: Anwendung: Aufgabe 2.3 – homogene Transformation의 Inverse

Aufgabe 2.3: 명시적인 역행렬 계산 없이 Inverse Transformation 구하기

주어진 homogene Transformationsmatrix D의 Inverse를 명시적인 역행렬 계산($^{-1}$ 기호 사용 없이) 없이 구하시오.

주어진 행렬:

$$D = \left(\mathrm{A} \quad \mathbf{r} \;\middle|\; 0 \quad 1 \right)$$

여기서 **A**는 Drehmatrix이고 **r**은 Ortsvektor입니다.

구해야 할 것: D^{-1}

힌트/참고: skript_rd, Kapitel 2.2.3, Gleichung 2.2.9 ($\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$)

제목: Lösung zu 2.3: Inverse의 유도 과정

Blockmatrix Inversion을 통한 유도

$D * D^{-1} = E$ (단위행렬)를 만족하는 $D^{-1} = (X \ \ y \mid 0 \ 1)$를 찾습니다.

$(A \ \ r \mid 0 \ 1) * (X \ \ y \mid 0 \ 1) = (A*X \ \ \ A*y+r \mid 0 \ 1)$

이 결과는 4x4 단위행렬 $(E \ \ 0 \mid 0 \ 1)$과 같아야 합니다.

이를 통해 두 개의 방정식을 얻을 수 있습니다:

1. $A * X = E$
2. $A * y + r = 0$

방정식 1의 해:

A는 Drehmatrix (orthonormal)이므로, $A^{-1} = A^T$가 성립합니다.
따라서 $X = A^{-1} = A^T$ 입니다.

방정식 2의 해:

$A * y = -r$
$y = A^{-1} * (-r) = -A^T * r$ 입니다.

최종 결과:

X와 **y**를 D^{-1}의 구조에 대입합니다:

$D^{-1} = (A^T \ \ \ -A^T r \mid 0 \ 1)$

제목: Zusammenfassung & 핵심 개념

핵심 요약

1. **DH-Parameter를 통한 체계적인 기술:**
   DH-Konvention은 복잡한 로봇 Kinematik을 각 Gelenk마다 단 4개의 Parameter(a, α, d, θ)로 설명하는 표준화된 방법을 제공합니다. 핵심은 Koordinatensystem 배치 규칙의 정확한 적용에 있습니다.

2. **보편적 도구로서의 homogene Transformation:**
   4x4 Matrix **D**는 Rotation (**A**)과 Translation (**r**)을 통합하여 위치와 방향을 쉽게 계산할 수 있게 해줍니다.

3. **Transformation의 연쇄:**
   로봇 Basis에서 Endeffektor까지의 전체 Transformation (0DN)은 각 Gelenk-Transformation (0D1 * 1D2 * ... * N-1DN)의 단순한 곱으로 계산됩니다.

4. **Matrix 속성 활용:**
   Drehmatrix의 $A^{-1} = A^{T}$와 같은 수학적 속성을 이해하는 것은 Inverse Transformation 계산과 같이 효율적인 계산에 매우 중요합니다.

Vielen Dank.

Fragen & Diskussion